

TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG TUYẾN TÍNH

Hoàng Lê Uyên Thực

Năm 2007

Chương 1

GIỚI THIỆU VỀ TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG

Nội dung chính chương này trình bày về:

- Các định nghĩa tín hiệu và hệ thống
- Mô hình toán học biểu diễn tín hiệu và hệ thống
- Phân loại tín hiệu
- Các phép toán cơ bản trên tín hiệu
- Các đặc điểm của tín hiệu
- Các phương pháp biểu diễn hệ thống
- Các đặc điểm của hệ thống

1.1 CÁC ĐỊNH NGHĨA CƠ BẢN

“That’s one small step for man- one giant leap for mankind”. Với câu nói nổi tiếng này, Commander Neil Amstrong đã bước ra khỏi phi thuyền, đặt chân lên bề mặt mặt trăng và trở thành người đầu tiên trên mặt trăng. Tiếng nói, hình ảnh bước đi của Commander Amstrong đã được truyền qua một đường truyền từ phi thuyền qua vệ tinh xuống trạm mặt đất, phân phát qua mạng truyền hình đến các máy thu hình tại gia đình. Chúng ta gọi đường truyền đó là hệ thống thông tin (communication system). Chức năng của hệ thống này là gửi tín hiệu tiếng nói và video từ phi thuyền trên mặt trăng xuống máy thu hình gia đình. Các thành phần của hệ thống gồm các thiết bị phục vụ cho việc phát, xử lý và thu nhận tín hiệu. Hệ thống thông tin ở đây là một phần của một hệ thống khác lớn hơn- hệ thống thám hiểm mặt trăng.

Chúng ta vừa nhắc đến hai thuật ngữ- “tín hiệu” (signal) và “hệ thống” (system) trong ví dụ trên. Hai từ này được sử dụng rất rộng rãi trong nhiều lĩnh vực khác nhau như kỹ thuật, khoa học, kinh tế, chăm sóc sức khỏe, chính trị... Trong môn học này, ta tập trung xét hệ thống là một phần hoặc ghép nối một số phần của thiết bị và phân tích ảnh hưởng của nó lên các tín hiệu đi qua nó. Công cụ sử dụng để phân tích tín hiệu và hệ thống là một số công cụ toán học hiệu quả và thông dụng.

Chúng ta sẽ bắt đầu với việc định nghĩa hai thuật ngữ “tín hiệu” và “hệ thống”. Đồng thời cũng xem xét mô hình toán học biểu diễn tín hiệu và hệ thống.

1.1.1 Định nghĩa tín hiệu và hệ thống

Trước hết ta xét một ví dụ minh họa, từ đây ta đưa ra định nghĩa tín hiệu và hệ thống.

Ta xét mạch điện sau:

Mạch điện trên được gọi là *hệ thống (system)*. Các điện trở, tụ điện, cuộn dây tạo nên hệ thống được gọi là *thành phần của hệ thống (system component)*. Điện áp và dòng điện biến thiên theo thời gian trong mạch gọi là *tín hiệu (signal)*.

Như vậy, ta có các định nghĩa sau:

1. Hệ thống là tập hợp các đối tượng vật lý có quan hệ nào đó với nhau
2. Các đối tượng vật lý đó được gọi là các thành phần của hệ thống.
3. Tín hiệu là các đại lượng vật lý biến thiên có trong hệ thống.

Căn cứ vào vị trí của tín hiệu trong hệ thống, ta phân tín hiệu ra thành tín hiệu vào, tín hiệu trung gian hay tín hiệu nội bộ và tín hiệu ra.

Tín hiệu vào (input signal) là tín hiệu đưa vào hệ thống từ một nguồn nào đó. *Tín hiệu ra (output signal)* là tín hiệu tạo ra bởi hệ thống đáp ứng với tín hiệu vào. Tín hiệu có ở bên trong hệ thống, không phải tín hiệu vào, cũng không phải tín hiệu ra là *tín hiệu nội bộ (internat signal)*.

1.1.2 Mô hình toán học biểu diễn tín hiệu và hệ thống

Việc phân tích tín hiệu và hệ thống cho phép ta xác định được các đặc điểm của tín hiệu và hệ thống cũng như cách thực hiện hệ thống. Một ví dụ về đặc điểm của tín hiệu là dạng sóng tín hiệu. Một ví dụ về đặc điểm của hệ thống là độ lợi hệ thống. Xác định được các đặc điểm này sẽ giúp ta biết được hệ thống có đáp ứng các yêu cầu kỹ thuật đề ra hay không.

Việc phân tích tín hiệu và hệ thống yêu cầu phải có một *mô hình toán học (mathematical model)* biểu diễn tín hiệu và hệ thống. Mô hình đó là các phương trình toán học biểu diễn tín hiệu và hệ thống.

1. Ví dụ về mô hình toán:

Xét hệ thống chiếu sáng hành lang toà nhà:

Mô hình của tín hiệu vào- ở đây là tín hiệu điện áp, như sau:

$$v(t) = 120\sqrt{2} \cos(2\pi \cdot 60t) \text{ [V]} \quad -\infty < t < \infty$$

Mô hình của một thành phần của hệ thống- ở đây là một bóng đèn, như sau:

$$i(t) = \frac{v(t)}{R}$$

với $v(t)$ là điện áp đặt trên hai đầu điện trở, $i(t)$ là dòng chạy qua điện trở và R là điện trở của dây tóc bóng đèn.

Mô hình toán của tín hiệu ra- ở đây là dòng yêu cầu bởi hệ thống, như sau:

$$i_a(t) = \frac{v(t)}{R_1} + \frac{v(t)}{R_2} + \frac{v(t)}{R_3} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) v(t) [A]$$

Đây cũng là mô hình toán của hệ thống, vì nó biểu diễn cho quan hệ giữa tín hiệu vào, tín hiệu ra và các thành phần của hệ thống.

Giả sử các điện trở là: $R_1 = R_2 + R_3 = 100\Omega$ thì:

$$i_a(t) = 5.091 \cos(2\pi.60t) [A] \quad -\infty < t < \infty$$

Mô hình này chỉ ra dạng sóng của dòng yêu cầu bởi hệ thống là dạng sin với biên độ là 5.091A.

2. Ý nghĩa của mô hình toán:

Mô hình toán cho phép ta phân tích tín hiệu và hệ thống một cách định lượng, để từ đó có thể so sánh, đánh giá hệ thống.

Mô hình toán cho phép ta thiết kế tín hiệu và hệ thống để đạt được các yêu cầu đề ra. Ta thiết kế tín hiệu và hệ thống bằng cách:

- Thay đổi các giá trị của các thông số của tín hiệu và hệ thống.
- Phân tích định lượng ảnh hưởng của sự thay đổi này đến các đặc trưng của tín hiệu và hệ thống.
- Sử dụng các ảnh hưởng này để chọn giá trị tốt nhất của thông số.

Thường thì bài toán thiết kế đã cho sẵn tín hiệu vào và việc phân tích hay thiết kế là thực hiện trên tín hiệu đó. Ví dụ như thiết kế bộ lọc các nhiễu không mong muốn như là nhiễu khí quyển trong máy thu radio. Nhưng cũng có trường hợp ta cần phải thay đổi tín hiệu vào cho đến khi có tín hiệu tối ưu. Ví dụ như trong hệ thống vô tuyến, ta cần thay đổi tín hiệu vào bằng cách điều chế để có thể phát xạ tín hiệu đó bằng anten. Bài toán thiết kế trong trường hợp này là thiết kế tín hiệu.

Thực tế ta không thể tìm được một mô hình toán học chính xác cho tín hiệu và hệ thống vật lý bởi vì có quá nhiều thông số liên quan. Ví dụ như mô hình biểu diễn tín hiệu điện áp trong ví dụ trên không phải là một mô hình chính xác. Lý do là tín hiệu điện áp thực tế không hoàn toàn là tín hiệu sin do trường điện từ ở bộ phát không hoàn toàn đồng nhất. Ngoài ra, các kết nối và cách điện không hoàn hảo cũng tạo ra nhiễu làm thay đổi tín hiệu đôi chút. Hơn nữa điện áp cũng không tồn tại khi $t = -\infty$ hay $t = +\infty$. Mô hình toán của điện trở cũng không hoàn toàn chính xác vì giá trị điện trở không hoàn toàn là hằng số mà thay đổi theo nhiệt độ. Nhiệt độ lại phụ thuộc vào nhiệt độ môi trường, dòng chạy qua điện trở... Điện trở cũng có thay đổi chậm theo thời gian và chuyển động ngẫu nhiên của các electron trong điện trở tạo ra nhiễu điện áp đặt trên hai đầu của nó.

Điều ta muốn là đơn giản hóa mô hình toán học chính xác càng nhiều càng tốt để giảm bớt độ phức tạp trong phân tích. Khi đơn giản hóa, ta bỏ qua các thông số ít ảnh hưởng lên các đặc điểm của tín hiệu và hệ thống.

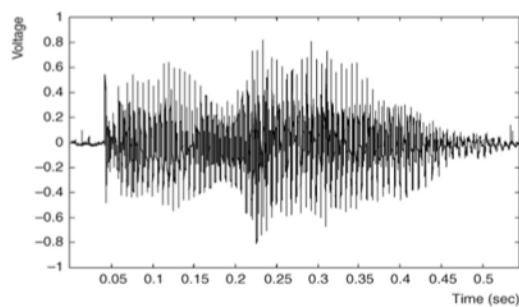
Cần lưu ý rằng các phương trình sử dụng để biểu diễn các tín hiệu và hệ thống ở đây chỉ là mô hình chứ không phải là tín hiệu thực sự hay hệ thống thực sự.

1.2 PHÂN LOẠI TÍN HIỆU

Tín hiệu(signal) dùng để chỉ một đại lượng vật lý biến thiên mang tin tức. Về mặt toán học, ta có thể mô tả tín hiệu như là một hàm theo biến thời gian, không gian hay các biến độc lập khác. Chẳng hạn như, hàm: $x(t) = 20t^2$ mô tả tín hiệu biến thiên theo biến thời gian t . Hay một ví dụ khác, hàm: $s(x, y) = 3x + 5xy + y^2$ mô tả tín hiệu là hàm theo hai biến độc lập x và y , trong đó x và y biểu diễn cho hai tọa độ không gian trong mặt phẳng.

Hai tín hiệu trong ví dụ trên thuộc về lớp tín hiệu có thể được biểu diễn chính xác bằng hàm theo biến độc lập. Tuy nhiên, trong thực tế, các mối quan hệ giữa các đại lượng vật lý và các biến độc lập thường rất phức tạp nên không thể biểu diễn tín hiệu như trong hai ví dụ vừa nêu trên.

Lấy ví dụ tín hiệu tiếng nói- đó là sự biến thiên của áp suất không khí theo thời gian. Chẳng hạn khi ta phát âm từ “away”, dạng sóng của từ đó được biểu diễn trên hình sau:



(a) Speech Sample: The Word “away”

Ví dụ tín hiệu tiếng nói

Một ví dụ khác là tín hiệu điện tâm đồ (ECG)- cung cấp cho bác sĩ những tin tức về tình trạng tim của bệnh nhân, hay là tín hiệu điện não đồ (EEG) cung cấp tin tức về hoạt động của não.

Các tín hiệu tiếng nói, ECG, EEG là các ví dụ về tín hiệu mang tin có thể biểu diễn là hàm theo biến thời gian. Thực tế có những tín hiệu là hàm theo nhiều biến độc lập. Ví dụ như tín hiệu ảnh (image)- là sự thay đổi của cường độ ánh sáng theo không gian, có thể xem là hàm độ sáng theo hai biến không gian.

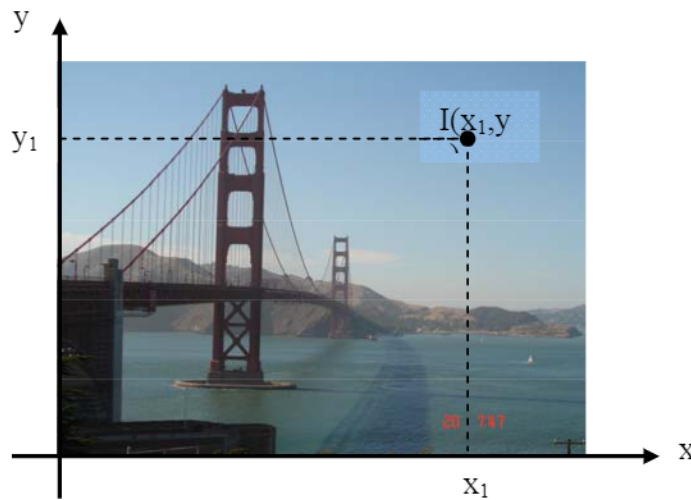
Tất cả các tín hiệu đều do một nguồn nào đó tạo ra, theo một cách thức nào đó. Ví dụ tín hiệu tiếng nói được tạo ra bằng cách ép không khí đi qua dây thanh âm. Một bức ảnh có được bằng cách phơi sáng một tấm phim chụp một cảnh/ đối tượng nào đó. Quá trình tạo ra tín hiệu như vậy thường liên quan đến một hệ thống, hệ thống này đáp ứng lại một kích thích nào đó. Trong tín hiệu tiếng nói, hệ thống là hệ thống phát âm, gồm môi, răng, lưỡi, dây thanh... Kích thích liên quan đến hệ thống được gọi là *nguồn tín hiệu (signal source)*. Như vậy ta có nguồn tiếng nói, nguồn ảnh và các nguồn tín hiệu khác.

Để tìm hiểu về tín hiệu, trước tiên ta cần xem qua cách phân loại tín hiệu. Có nhiều cách phân loại tín hiệu khác nhau tùy vào từng ứng dụng cụ thể.

1.2.1 Tín hiệu nhiều hướng và tín hiệu nhiều kênh

Như đã nói trên, tín hiệu có thể được mô tả là hàm theo một hoặc nhiều biến độc lập. Nếu tín hiệu là hàm theo một biến, ta gọi đó là các *tín hiệu một hướng (one-dimension signal)*, như tín hiệu điện áp, tiếng nói, ECG, EEG. Ngược lại ta gọi là *tín hiệu nhiều hướng (multi-dimension signal)*, ví dụ như tín hiệu ảnh trắng đen, mỗi điểm ảnh là hàm theo 2 biến độc lập.

Trong một số ứng dụng, tín hiệu được tạo ra không phải từ một mà là nhiều nguồn hay nhiều bộ cảm biến. Các tín hiệu như vậy được gọi là *tín hiệu đa kênh (multi-channel signal)*. Bức ảnh màu sau là một ví dụ về tín hiệu 2 hướng, 3 kênh.



Ví dụ tín hiệu ảnh màu (2 hướng- 3 kênh)

Ta thấy độ sáng $I(x,y)$ ở mỗi một điểm là hàm theo 2 biến không gian độc lập, độ sáng này lại phụ thuộc vào độ sáng của 3 màu cơ bản red, green và blue.

Một ví dụ khác, tín hiệu ảnh TV màu là tín hiệu 3 hướng- 3 kênh, có thể biểu diễn bởi vector sau :

$$I(x, y, t) = \begin{bmatrix} I_r(x, y, t) \\ I_g(x, y, t) \\ I_b(x, y, t) \end{bmatrix}$$

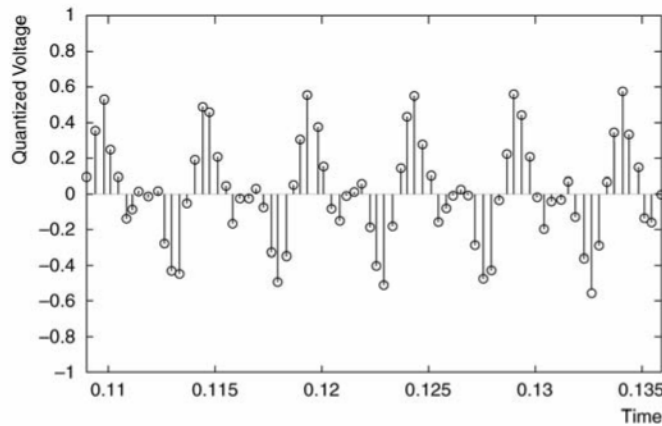
Trong giáo trình này, ta tập trung xét tín hiệu một hướng- một kênh, biến là biến thời gian (mặc dù thực tế không phải lúc nào biến cũng là biến thời gian)

1.2.2 Tín hiệu liên tục và tín hiệu rời rạc

Tín hiệu liên tục (continuous-time signal) hay còn gọi là tín hiệu tương tự là tín hiệu được xác định tại tất cả các thời điểm. Về mặt toán học, có thể mô tả tín hiệu này là hàm của một biến liên tục, ví dụ tín hiệu tiếng nói.

Tín hiệu rời rạc (discrete-time signal) chỉ được xác định tại một số thời điểm rời rạc nào đó. Khoảng cách giữa các thời điểm này không nhất thiết phải bằng nhau, nhưng trong thực tế thường là lấy bằng nhau để dễ tính toán. Có thể tạo ra tín hiệu rời rạc từ tín hiệu liên tục bằng 2 cách. Một là lấy mẫu tín hiệu liên tục, hai là đo hay đếm một đại lượng vật lý nào đó theo một chu kỳ nhất định, ví dụ cân em bé hàng tháng, đo áp suất không khí theo giờ...

Tín hiệu $x(t_n) = e^{-|t_n|}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ là một ví dụ về tín hiệu rời rạc. Ta có thể dùng biến nguyên n thay cho biến thời gian rời rạc t_n . Lúc này, tín hiệu trở thành một hàm theo biến nguyên, về mặt toán ta có thể biểu diễn tín hiệu rời rạc là một dãy số (thực hoặc phức). Ta sử dụng ký hiệu $x(n)$ thay cho $x(t_n)$, nghĩa là $t_n = nT$ với T là hằng số- khoảng cách giữa hai thời điểm rời rạc cạnh nhau. Hình sau là một ví dụ về tín hiệu tiếng nói rời rạc.

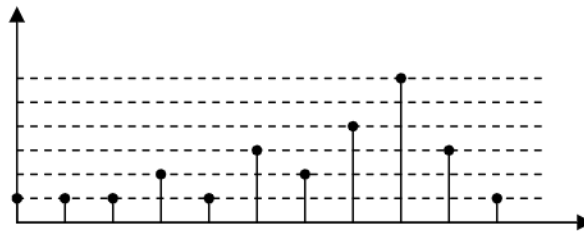


Trong môn học này, ta tập trung xét tín hiệu liên tục và hệ thống hoạt động với tín hiệu liên tục ở đầu vào, tạo ra tín hiệu liên tục ở đầu ra. Hệ thống đó gọi là *hệ thống liên tục (continuous-time system)*.

1.2.3 Tín hiệu biên độ liên tục và biên độ rời rạc

Biên độ của cả tín hiệu liên tục và rời rạc đều có thể liên tục hay rời rạc.

Nếu tín hiệu có tất cả các giá trị trong một dải biên độ nào đó thì ta gọi đó là *tín hiệu biên độ liên tục (continuous-valued signal)*. Ngược lại, nếu tín hiệu chỉ lấy một số giá trị nào đó (còn gọi là mức) trong một dải biên độ thì đó là *tín hiệu biên độ rời rạc (discrete-valued signal)*. Khoảng cách giữa các mức biên độ này có thể bằng nhau hay không bằng nhau. Thường thì ta biểu diễn các mức biên độ này bằng một số nguyên, đó là bội số của khoảng cách giữa hai mức biên độ cạnh nhau. Tín hiệu rời rạc theo cả thời gian và biên độ được gọi là *tín hiệu số (digital signal)*. Hình sau là một ví dụ về tín hiệu số.



Ví dụ tín hiệu số với 6 mức biên độ khác nhau

1.2.4 Tín hiệu xác định và tín hiệu ngẫu nhiên

Dựa vào mô hình toán học biểu diễn tín hiệu, ta có một cách phân loại tín hiệu khác.

Các tín hiệu có thể được mô tả duy nhất bằng một biểu diễn toán học rõ ràng như là phương trình, đồ thị, bảng dữ liệu... được gọi là *tín hiệu xác định (deterministic signal)*. Từ “xác định” ý muốn nhấn mạnh là ta biết rõ và chắc chắn các giá trị của tín hiệu trong quá khứ, hiện tại và tương lai.

Tuy nhiên trong nhiều ứng dụng thực tế, có những tín hiệu không thể biểu diễn chính xác bằng các công thức toán học hay những mô tả toán học như vậy là quá phức tạp. Ta không thể đoán trước sự biến thiên của các giá trị của loại tín hiệu này. Ta gọi đây là *tín hiệu ngẫu nhiên (random signal)*. Ví dụ tín hiệu nhiễu là tín hiệu ngẫu nhiên.

Ta cần lưu ý rằng việc phân loại tín hiệu thực thành xác định hay ngẫu nhiên không phải lúc nào cũng rõ ràng. Đôi khi, xem tín hiệu là xác định hay ngẫu nhiên đều dẫn đến những kết

quả có ý nghĩa. Nhưng đôi khi, việc phân loại sai sẽ dẫn đến kết quả bị lỗi, bởi vì có những công cụ toán chỉ có thể áp dụng cho tín hiệu xác định, trong khi các công cụ khác lại chỉ áp dụng cho tín hiệu ngẫu nhiên. Điều này sẽ trở nên rõ ràng hơn khi ta kiểm tra các công cụ toán cụ thể.

Trong môn học này, ta tập trung xét tín hiệu xác định.

1.3 CÁC PHÉP TOÁN CƠ SỞ TRÊN TÍN HIỆU

Có ba phép toán cơ bản trên tín hiệu thường xuất hiện trong hệ thống và trong phân tích hệ thống. Đó là phép thay đổi thang thời gian, đảo thời gian và dịch thời gian. Mỗi phép toán này tạo ra một sự biến đổi khác nhau đối với biến thời gian trong mô hình toán học của tín hiệu.

1.3.1 Phép thay đổi thang thời gian

Phép thay đổi thang thời gian là nén hoặc giãn tín hiệu theo trục thời gian.

Ví dụ khi truyền dữ liệu từ vệ tinh xuống trạm mặt đất, ta rời rạc hóa tín hiệu thành các mẫu rời rạc, lưu các mẫu lại rồi nén tín hiệu bằng cách thu hẹp khoảng cách giữa hai mẫu cạnh nhau để giảm thời gian truyền tín hiệu. Xuống đến trạm mặt đất, tín hiệu rời rạc bị nén sẽ được giãn ra như lúc đầu, sau đó được khôi phục lại thành tín hiệu liên tục.

Đối với tín hiệu liên tục, để thay đổi thang thời gian với hệ số là $b > 0$, ta thay t bằng bt trong mô hình tín hiệu. Nói chung, tín hiệu $x(bt)$ là một phiên bản nén thời gian của $x(t)$ nếu $b > 1$ và là phiên bản giãn thời gian của $x(t)$ nếu $b < 1$.

Ví dụ: $b = 0.5$ và $b = 2$

1.3.2 Phép đảo thời gian

Phép toán này phản xạ tín hiệu qua một trục đi ngang gốc thời gian $t = 0$, nghĩa là nó đảo ngược tín hiệu trên trục thời gian.

Ví dụ tín hiệu ảnh chuyển động có được khi ta quay ngược cuộn film.

Đối với tín hiệu liên tục, ta đảo thời gian bằng cách thay t bằng $-t$ trong mô hình tín hiệu.

Ví dụ:

1.3.3 Phép dịch thời gian

Phép dịch thời gian là phép dịch tín hiệu sang phải hoặc trái một khoảng thời gian nào đó.

Đối với tín hiệu liên tục, phép dịch thời gian sang phải t_1 giây là phép thay t bằng $t - t_1$ ($t_1 > 0$) trong mô hình tín hiệu, phép dịch thời gian sang trái là phép thay t bằng $t + t_1$ ($t_1 > 0$) trong mô hình tín hiệu. Nói cách khác, $x(t - t_1)$ là phiên bản dịch phải hay trễ của $x(t)$ và $x(t + t_1)$ là phiên bản dịch trái hay sớm của $x(t)$.

Ví dụ tiếng sấm ta nghe được bị trễ đi so với khi thấy ánh chớp của sét trên bầu trời. Trong ví dụ này, ta có: $t_1 = r / v_s > 0$ với r là khoảng cách từ chỗ ta đứng đến chỗ phát ra tia chớp và v_s là vận tốc của âm thanh trong không khí.

Ví dụ:

1.3.4 Kết hợp các phép toán

Ta có thể kết hợp nhiều phép toán với nhau trên cùng một tín hiệu. Trong trường hợp này, tín hiệu kết quả sẽ không phụ thuộc vào thứ tự thực hiện các phép toán.

1. Kết hợp phép thay đổi thang thời gian với phép đảo thời gian

Ta có tín hiệu $x(t)$, giả sử ta cần thay đổi thang thời gian với $b = 2$ và nén, ta có thể thực hiện hai cách như sau:

- nén $x(t)$ đi 2 lần ta được $x(2t)$, sau đó đảo thời gian $x(2t)$ ta được $x(-2t)$.
- đảo thời gian trước ta được $x(-t)$, sau đó nén $x(-t)$ ta được $x(-2t)$ trùng với kết quả trên.

2. Kết hợp phép thay đổi thang thời gian với phép dịch thời gian

Ta có tín hiệu $x(t)$, giả sử ta cần thay đổi thang thời gian với $b = 0.5$ và dịch phải với $t_1 = 1$, ta thực hiện hai cách như sau:

- giãn $x(t)$ ta được $x(0.5t)$, sau đó dịch sang phải ta được $x(0.5(t-1)) = x(0.5t - 0.5)$
- dịch $x(t)$ sang phải ta được $x(t - 1)$, sau đó giãn ta được $x(0.5(t-1)) = x(0.5t - 0.5)$ trùng với kết quả trên.

3. Kết hợp phép dịch thời gian với phép đảo thời gian

Ta có tín hiệu $x(t)$, giả sử ta cần dịch thời gian với $t_1 = 1$ và đảo, ta có thể thực hiện hai cách như sau:

- đảo $x(t)$ ta được $x(-t)$, sau đó dịch phải ta được: $x(-(t-1)) = x(-t+1)$
- dịch phải trước ta được $x(t - 1)$, sau đó đảo thời gian ta được $x(-(t-1)) = x(-t+1)$ trùng với kết quả trên.

Ví dụ:

$$(a) \ x(t) = 2 - |t|$$

$$(b) \ y(t) = \begin{cases} 2, & -3 \leq t < 0 \\ 2 - t, & 0 \leq t \leq 2 \end{cases}$$